

Chap1 The Foundations: Logic and Proofs

Part II: Predicate Logic

Jin-Hui Wu

2026-03-06

大纲

□ 命题逻辑

□ 谓词逻辑

□ 证明方法

大纲

□ 谓词逻辑

□ 谓词和量词 (1.4)

□ 变量和谓词

□ 量词

□ 表达自然语言

□ 量词嵌套

为什么需要谓词逻辑？

- 已知

- 所有人都会死。

- 苏格拉底是人。

- 是否能得出“苏格拉底会死”？

为什么需要谓词逻辑？

- 已知

- 所有人都会死。

- 苏格拉底是人。

- 是否能得出“苏格拉底会死”？

- 无法通过命题逻辑推导

- 命题逻辑不关心命题内部结构

变量和谓词

□ 变量 (**variable**)

- 用于表示描述的对象，可被常量替换
- 常用小写字母表示，如：x, y, z

变量和谓词

□ 变量 (variable)

□ 谓词 (**predicate**)

□ 用于下论断，是谓词，如“是人”、“会死”

□ 常用大写字母表示，如： $P(x)$, $Q(x,y)$

变量和谓词

- 变量 (variable)

- 谓词 (**predicate**)

 - 用于下论断，是谓词，如“是人”、“会死”

 - 常用大写字母表示，如： $P(x)$, $Q(x,y)$

 - P 和 Q 被称作命题函数 (**propositional function**)

 - P 作用在常量上时，是一个命题

 - 如： $P(x)$ 表示 x 为正数，则 $P(1)$ 是真命题， $P(-1)$ 是假命题

变量和谓词

- 变量 (variable)

- 谓词 (**predicate**)

- 用于下论断，是谓词，如“是人”、“会死”

- 常用大写字母表示，如： $P(x)$, $Q(x,y)$

- P 和 Q 被称作命题函数 (**propositional function**)

- P 作用在常量上时，是一个命题

- 如： $P(x)$ 表示 x 为正数，则 $P(1)$ 是真命题， $P(-1)$ 是假命题

- P 作用在变量上时，是一个函数

- 上述 $P(x)$ 将实数映射到 $\{T,F\}$

例

变量	x, y, z, \dots
谓词	$P(x), Q(x,y), \dots$
量词	\forall, \exists

□ 令 $P(x, y, z)$ 表示 $x + y = z$

□ 判断下列各式真值

□ $R(2, -1, 5)$

□ $R(3, 4, 7)$

□ $R(x, 3, z)$

例

联结词	
变量	x, y, z, \dots
谓词	$P(x), Q(x,y), \dots$
量词	\forall, \exists

□ 令 $P(x)$ 表示 $x > 0$

□ 判断下列各式真值

□ $P(3) \vee P(-1)$

□ $P(3) \wedge P(-1)$

□ $P(3) \rightarrow \neg P(-1)$

□ $P(3) \wedge P(y)$

大纲

□ 谓词逻辑

□ 谓词和量词 (1.4)

- 变量和谓词

- 量词

- 表达自然语言

□ 量词嵌套

量词

- 量词 (**quantifier**)
 - 用于限定变量范围
 - 所有人都会死
 - 有些猫没有毛

量词

□ 量词 (**quantifier**)

□ 用于限定变量范围

□ 所有人都会死

□ 有些猫没有毛

□ 最常用的两个量词

□ 全称量词 (**universal** quantifier)

任意 \forall

□ 存在量词 (**existential** quantifier)

存在 \exists

例

联结词	
变量	x, y, z, \dots
谓词	$P(x), Q(x,y), \dots$
量词	\forall, \exists

□ $\forall x P(x)$

□ $P(x)$ 对定义域 U 内的所有 x 均成立

例

联结词	
变量	x, y, z, \dots
谓词	$P(x), Q(x,y), \dots$
量词	\forall, \exists

□ $\forall x P(x)$

□ $P(x)$ 对定义域 U 内的所有 x 均成立

□ 判断下列例子中 $\forall x P(x)$ 的真值

□ $P(x): x > 0$, 且 U 为整数集

□ $P(x): x > 0$, 且 U 为正整数集

□ $P(x): x$ 为偶数, 且 U 为整数集

例

联结词	
变量	x, y, z, \dots
谓词	$P(x), Q(x,y), \dots$
量词	\forall, \exists

□ $\exists x P(x)$

□ $P(x)$ 对定义域 U 内的一些 x 成立

例

联结词	
变量	x, y, z, \dots
谓词	$P(x), Q(x,y), \dots$
量词	\forall, \exists

□ $\exists x P(x)$

□ $P(x)$ 对定义域 U 内的一些 x 成立

□ 判断下列例子中 $\exists x P(x)$ 的真值

□ $P(x): x > 0$, 且 U 为整数集

□ $P(x): x < 0$, 且 U 为正整数集

□ $P(x): x$ 为偶数, 且 U 为整数集

量词与有限定义域

□ 例

□ $U = \{\text{周六, 周日}\}$, $P(x)$ 为 x 是休息日

□ $\forall x P(x)$ 和 $\exists x P(x)$ 是否有其他表示方法 ?

量词与有限定义域

□ 例

□ $U = \{\text{周六}, \text{周日}\}$, $P(x)$ 为 x 是休息日

□ $\forall x P(x)$ 和 $\exists x P(x)$ 是否有其他表示方法 ?

□ $\forall x P(x)$

□ 周六是休息日, 且周日是休息日

□ $\exists x P(x)$

□ 周六是休息日, 或周日是休息日

量词与有限定义域

□ 例

□ $U = \{\text{周六}, \text{周日}\}$, $P(x)$ 为 x 是休息日

□ $\forall x P(x)$ 和 $\exists x P(x)$ 是否有其他表示方法？

□ 定义域 U 有限时，量词可以用联结词替换

□ 任意 可用 且 替换

□ 存在 可用 或 替换

量词的运算顺序

□ 非 > 任意 = 存在 > 且 > 或 > 蕴含 > 双蕴含

□ 下列两式含义不同

□ $\forall x P(x) \vee Q(x)$

□ $\forall x (P(x) \vee Q(x))$

大纲

□ 谓词逻辑

□ 谓词和量词 (1.4)

- 变量和谓词

- 量词

- 表达自然语言

□ 量词嵌套

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ Every student in this class has taken a course in Java.

步骤

- 拆分子句
- 找定义域
- 定义谓词
- 确定量词
- 完整翻译

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ Some student in this class has taken a course in Java.

步骤

- 拆分子句
- 找定义域
- 定义谓词
- 确定量词
- 完整翻译

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ 所有人都会死，苏格拉底是人，所以苏格拉底会死。

步骤

- 拆分子句
- 找定义域
- 定义谓词
- 确定量词
- 完整翻译

量词的否定

□ 所有鸟都有羽毛

□ $\forall x F(x)$ 定义域为鸟, $F(x)$ 为 x 有羽毛

□ 否定

□ 不是所有鸟都有羽毛

□ $\neg \forall x F(x)$

□ 有鸟没有羽毛

□ $\exists x (\neg F(x))$

量词的否定

□ 所有鸟都有羽毛

□ $\forall x F(x)$ 定义域为鸟， $F(x)$ 为 x 有羽毛

□ 否定

□ 不是所有鸟都有羽毛

□ $\neg \forall x F(x)$

$$\neg \forall x F(x) \equiv \exists x (\neg F(x))$$

□ 有鸟没有羽毛

□ $\exists x (\neg F(x))$

\equiv : 取任意谓词和定义域时，两侧真值均相等

量词的否定

□ 存在鸟有羽毛

□ $\exists x F(x)$ 定义域为鸟, $F(x)$ 为 x 有羽毛

□ 否定

□ 不存在鸟有羽毛

□ $\neg \exists x F(x)$

□ 所有鸟都没有羽毛

□ $\forall x (\neg F(x))$

量词的否定

□ 存在鸟有羽毛

□ $\exists x F(x)$ 定义域为鸟， $F(x)$ 为 x 有羽毛

□ 否定

□ 不存在鸟有羽毛

□ $\neg \exists x F(x)$

□ 所有鸟都没有羽毛

□ $\forall x (\neg F(x))$

$$\neg \exists x F(x) \equiv \forall x (\neg F(x))$$

量词的德摩根律

□ 德摩根律 (De Morgan's Laws)

$$\square \neg \forall x F(x) \equiv \exists x (\neg F(x))$$

$$\square \neg \exists x F(x) \equiv \forall x (\neg F(x))$$

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ 并不是所有的士兵都想当将军。

$$\neg \forall x F(x) \equiv \exists x (\neg F(x))$$
$$\neg \exists x F(x) \equiv \forall x (\neg F(x))$$

大纲

□ 谓词逻辑

□ 谓词和量词 (1.4)

- 变量和谓词

- 量词

- 表达自然语言

□ 量词嵌套 (1.5)

量词嵌套

□ 量词嵌套 (**nested** quantifier)

□ 使用至少两次量词

□ $\forall x \forall y P(x,y)$

例：唯一

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ $x + 1 = 0$ 有唯一解。

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ 任何实数都有相反数。

量词的顺序 (order)

□ 有两层嵌套时

□ 两个任意

$$\forall x \forall y P(x, y) \quad \equiv \quad \forall y \forall x P(x, y)$$

量词的顺序 (order)

□ 有两层嵌套时

□ 两个任意

$$\forall x \forall y P(x, y) \quad \equiv \quad \forall y \forall x P(x, y)$$

□ 两个存在

$$\exists x \exists y P(x, y) \quad \equiv \quad \exists y \exists x P(x, y)$$

量词的顺序 (order)

□ 有两层嵌套时

□ 两个任意

$$\forall x \forall y P(x, y) \quad \equiv \quad \forall y \forall x P(x, y)$$

□ 两个存在

$$\exists x \exists y P(x, y) \quad \equiv \quad \exists y \exists x P(x, y)$$

□ 一个任意一个存在

$$\forall x \exists y P(x, y) \quad \not\equiv \quad \exists y \forall x P(x, y)$$

例

□ $P(x,y)$ 表示 $x+y=0$, U 为实数集

□ $\forall x \exists y P(x,y)$

□ 真命题

□ $\exists y \forall x P(x,y)$

□ 假命题

例

□ $P(x,y)$ 表示 $xy=0$, U 为实数集

□ 判断下列语句真值

□ $\forall x \forall y P(x,y)$

□ $\forall x \exists y P(x,y)$

□ $\exists x \forall y P(x,y)$

□ $\exists x \exists y P(x,y)$

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ (1) Every student in your school has a computer or has a friend.

□ (2) Every student in your school has a computer or has a friend who has a computer.

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ The sum of two positive integers is always positive.

例

□ 将下列句子用谓词逻辑表达

□ There is a woman who has taken a flight on every airline in the world.

□ There is not a woman who has taken a flight on every airline in the world.

例

□ 将极限定义用谓词逻辑表达

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

□ For every real number $\varepsilon > 0$, there exists a real number $\delta > 0$ such that $|f(x) - L| < \varepsilon$ whenever $0 < |x - a| < \delta$.

总结

□ 谓词逻辑新元素

- 变量 表示描述的对象 x, y, z
- 谓词 下论断 $P(x), Q(x,y)$
- 量词 限制变量范围 \forall, \exists
 - 任意和存在的嵌套不能交换顺序

□ 表达自然语言

- 拆分子句
- 找定义域
- 定义谓词
- 确定量词
- 完整翻译